

О ВКЛЮЧЕНИИ $D_5(G) \subseteq \gamma_4(G)$: СВЕДЕНИЕ, ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДЛЯ КОЛЕЦ ЛИ И ВЫЧИСЛЕНИЯ

Аннотация. Для группы G пусть $D_n(G) = G \cap (1 + \Delta(G)^n)$ — её целочисленные размерные подгруппы, а $\gamma_n(G)$ — её нижний центральный ряд. Верно ли включение $D_5(G) \subseteq \gamma_4(G)$ для всякой группы, неизвестно (Коуровская тетрадь, задача 20.84). Для колец Ли аналогичное включение недавно доказано Иониным, Михайловым и Петровым и формально проверено в Lean. В этой заметке собрано то, что известно, приведена элементарная редукция группового вопроса к конечным метабелевым 2-группам ступени нильпотентности три, разобрано, какие шаги доказательства для колец Ли не имеют теоретико-группового аналога, и изложены вычислительные данные. Для 3-кручения в D_5/γ_5 мы доказываем $D_5(G) = \gamma_5(G)$, когда $G/\gamma_2(G)$ конечна и у неё не больше одного инварианта, большего 3, а с помощью компьютерного перебора — для всех 3-групп порядка не больше 3^9 . *Задачу мы не решаем.*

1. ВОПРОС

Пусть $\Delta = \Delta(G)$ — аугментационный идеал кольца $\mathbb{Z}[G]$ и $D_n(G) = \{g \in G : g - 1 \in \Delta^n\}$. Всегда $\gamma_n(G) \subseteq D_n(G)$ **[на бумаге; Lean: §4]**, причём при $n \leq 3$ имеет место равенство, а при $n = 4$ оно в общем случае нарушается (Рипс [Rip72]).

Вопрос 1.1 ([KM26, задача 20.84], [IMP26, §1.3]). *Верно ли, что $D_5(G) \subseteq \gamma_4(G)$ для всякой группы G ? **[открыто]***

Известные факты, используемые ниже (все **[на бумаге]**, из цитируемых источников): $D_4(G)^2 \subseteq \gamma_4(G)$ (Пасси [Pas68], см. также [MP09]); фактор $D_n(G)/\gamma_n(G)$ абелев [GK92]; экспонента $D_5(G)/\gamma_5(G)$ делит $3! = 6$ (Тахара [Tah81, следствие 6.11]; там это доказано для конечных групп, к которым общий случай сводится стандартным рассуждением; там же дано явное описание D_5 для конечных групп ступени 4 [Tah81, теорема 6.1] и показано, что $D_k = \gamma_k$ при $k \leq 5$, если в G нет элементов порядка 2 и 3 [Tah81, следствие 6.12]); утверждение Гупты о том, что все D_n/γ_n являются 2-группами [Gup02], неверно: Бартольди и Михайлов построили 3-группу с $D_7 \neq \gamma_7$ [BM23]. См. также наш разбор рассуждения Гупты (вики, МATH-3).

Дата: Черновик, 18 октября 2026 г. Отметки статуса: **[Lean]** формально проверено; **[на бумаге]** доказано на бумаге (здесь или в цитируемом источнике); **[компьютер]** проверено вычислением; **[открыто]**.

2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ РЕДУКЦИЯ

Предложение 2.1. *Следующие условия равносильны.*

- (1) $D_5(G) \subseteq \gamma_4(G)$ для всякой группы G .
- (2) $D_5(M) = 1$ для всякой метабелевой группы M степени нильпотентности не выше 3.
- (3) $D_5(Q) = 1$ для всякой конечной метабелевой 2-группы Q степени нильпотентности ровно 3.

Доказательство [на бумаге; Lean] (в Lean теоремы Пасси, Грюнберга и $D_3 = \gamma_3$ — явные гипотезы).
 (1) $\Rightarrow$ (3) очевидно, поскольку $\gamma_4(Q) = 1$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Положим $N = \gamma_4(G)G''$. Так как $G'' = [\gamma_2(G), \gamma_2(G)] \subseteq \gamma_4(G)$, имеем $N = \gamma_4(G)$, и $M = G/N$ метабелева степени ≤ 3 . Проекция $\pi: G \rightarrow M$ индуцирует гомоморфизм колец $\mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[M]$, переводящий $\Delta(G)^n$ в $\Delta(M)^n$, поэтому $\pi(D_5(G)) \subseteq D_5(M) = 1$, т.е. $D_5(G) \subseteq N = \gamma_4(G)$. (Это групповой вариант перехода от теоремы С к следствию D в [IMP26].)

(3) $\Rightarrow$ (2). Пусть M метабелева степени ≤ 3 и $1 \neq x \in D_5(M)$. Конечная порожждённость. Элемент $x - 1$ является конечной $\mathbb{Z}$ -линейной комбинацией произведений $(g_1 - 1) \cdots (g_5 - 1)$; все g_i и x лежат в некоторой конечно порождённой подгруппе H , и тогда $x \in D_5(H)$. Группа H метабелева степени ≤ 3 , а значит, конечно порождённая нильпотентная. Экспонента два. По Пасси $D_4(H)^2 \subseteq \gamma_4(H) = 1$; так как $D_5 \subseteq D_4$, получаем $x^2 = 1$. Конечные 2-факторы. Пусть T — (конечная, нормальная) подгруппа элементов нечётного порядка в H ; $x \notin T$. Группа H/T конечно порождённая нильпотентная с периодической частью, являющейся 2-группой, и потому финитно аппроксимируема конечными 2-группами (Грюнберг [Gru57]). Выберем фактор-группу Q группы H , являющуюся конечной 2-группой, в которой образ x нетривиален; по функториальности он лежит в $D_5(Q)$. Группа Q метабелева степени ≤ 3 , а степень ≤ 2 невозможна, так как тогда $D_5(Q) \subseteq D_3(Q) = \gamma_3(Q) = 1$. $\square$

Замечание 2.2 («метабелевость» автоматична). Всякая группа степени нильпотентности ≤ 3 метабелева: $G'' = [\gamma_2(G), \gamma_2(G)] \subseteq \gamma_4(G)$ по включению Ф. Холла $[\gamma_i, \gamma_j] \subseteq \gamma_{i+j}$ (см., например, [MP09]); это тот же факт, что использован в (2) $\Rightarrow$ (1). Поэтому в (2) и (3) слово «метабелева» можно опустить: (3) утверждает, что $D_5(Q) = 1$ для всякой конечной 2-группы степени 3, и пространство поиска в §5 — это просто 2-группы степени 3. То же верно для колец Ли ($[\gamma_2, \gamma_2] \subseteq \gamma_4$), так что теорема С из [IMP26] при $c = 3$ тоже не нуждается в предположении метабелевости; оно существенно лишь при $c \geq 4$, где утверждение $D_{2c-1} = 1$ для всех групп степени $\leq c$ — другой, более сильный вопрос. Этот стандартный факт мы заметили заново только при подготовке перебора через ANUPQ (MATH-37), где опция `Metabelian` ничего не отсекала. **[на бумаге]**

Замечание 2.3 (ограниченный вариант). Для конечных групп доказательство даёт больше. Если G конечна, то конечны и $M = G/\gamma_4(G)$, и

$H \leq M$, и можно взять $Q = H/T$ — конечную 2-группу, порядок которой равен 2-части $|H|$ и, следовательно, делит 2-часть $|G|$. Поэтому: *если $D_5(Q) = 1$ для всех метабелевых 2-групп Q степени 3 порядка $\leq 2^k$, то $D_5(G) \subseteq \gamma_4(G)$ для всякой конечной группы G , силовская 2-подгруппа которой имеет порядок $\leq 2^k$ [на бумаге; Lean]* (в Lean теорема Грюнберга не нужна: там $H = M$, а Q — силовская 2-подгруппа M , прямой множитель нильпотентной группы M ; для Q степени ≤ 3 единственная гипотеза — теорема Пасси, для степени ровно 3 — ещё $D_3 = \gamma_3$). Заметим, что шаг об экспоненте использует теорему Пасси для H (где $\gamma_4(H) = 1$), а не для произвольной группы.

Замечание 2.4. Предложение 2.1(2) — это в точности групповой аналог теоремы C из [IMP26] при $c = 3$ («метабелево кольцо Ли степени $\leq c$ имеет $D_{2c-1} = 0$ »). Редукция элементарна и почти наверняка известна специалистам; мы приводим её, поскольку она фиксирует пространство поиска для вычислений (§5).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДЛЯ КОЛЕЦ ЛИ И ГДЕ ОНО НЕ ПЕРЕНОСИТСЯ

Изложим вкратце доказательство [IMP26, теорема C, следствие D], сверенное с текстом ([на бумаге]; окончательные утверждения [Lean], проверены в нашей вики, МATH-6).

- (1) Редукция к метабелеву L степени $\leq c$ (следствие 6.14) и к конечно порождённому L (лемма 6.13). *Переносится*: это предложение 2.1.
- (2) Центральное расширение $0 \rightarrow K \rightarrow T \rightarrow L \rightarrow 0$, $T = L \times_{L_{ab}} P$ со свободной абелевой P , такое, что $\gamma_i(T) \cong \gamma_i(L)$ при $i \geq 2$ и $T \cong T' \oplus P$ как аддитивные группы (лемма 6.4, следствие 6.7).
- (3) Целочисленная теорема PBW: $\text{gr } U(T) \cong \text{Sym}_{\mathbb{Z}}(T)$ и, для T , являющегося прямой суммой циклических групп, явный $\mathbb{Z}$ -базис из упорядоченных мономов с известными аддитивными порядками (теорема 2.3, следствие 2.4).
- (4) Аддитивная проекция $p: U(T) \rightarrow P_{\leq 2}U(T)$ на мономы длины ≤ 2 (§6.2) и ретракция $r: P_{\leq 2}U(T) \rightarrow T$, убивающая $Z(T) \cdot T$ (лемма 5.3).
- (5) Квадратичная часть $p(\varpi(T)^n)$ лежит в $\sum_{i+j=n} \gamma_i(T)\gamma_j(T)$ (предложение 6.12); при $n = 2c - 1$ каждое такое слагаемое имеет центральный множитель, и теорема 5.1 даёт $D_{2c-1}(L) = 0$.

Препятствия для групп (наш анализ; [на бумаге] там, где указан источник, в остальных случаях это объяснение, а не теорема):

- Нет PBW-базиса нужного вида. Шаг 3 — сердцевина рассуждения: он даёт аддитивное расщепление $U(T)$ по длине мономов, согласованное с аддитивными порядками, так что «квадратичная часть» элемента корректно определена и вычислима. Для $\mathbb{Z}[G]$ фильтрация степенями Δ имеет присоединённое градуированное

кольцо $\bigoplus \Delta^n / \Delta^{n+1}$, которое в общем случае *не* является целочисленной универсальной обёртывающей алгеброй для $\mathrm{gr} \gamma_\bullet(G)$; над $\mathbb{Q}$ аналогичное сравнение — это теорема Квиллена, а над $\mathbb{Z}$ её нарушение по существу и есть сама проблема размерных подгрупп (ср. [HMP07, MP09]). Канонической аддитивной проекции $\mathbb{Z}[G]$ на «длину ≤ 2 » нет.

- *Расширение T .* У шага 2 есть формальный групповой аналог (поднять свободное абелево накрытие G_{ab} вдоль $G \rightarrow G_{ab}$, получив центральное расширение с теми же старшими членами нижнего центрального ряда). Недостаёт того, как им воспользоваться: в случае колец Ли T' является аддитивным прямым слагаемым и его элементы коммутируют в $U(T)$, на чём основаны переписывающие леммы 6.9–6.10. В $\mathbb{Z}[G]$ произведения коммутаторов не коммутируют, и соответствующее переписывание порождает члены более высокого порядка («собираение»).
- *Кручение возникает уже в степени четыре.* Для колец Ли $D_n = \gamma_n$ при $n \leq 3$ и $2D_4 \subseteq \gamma_4$ [BP15] — та же картина, что и для групп; но для групп уже описание D_4/γ_4 требует всей техники Рипса–Пасси, а известные групповые вычисления D_5 (например, группа из [IMP26, §3.3], где $D_5(G) = \langle w \rangle \subseteq \gamma_4(G)$) проводятся для каждого случая отдельно.

4. ФОРМАЛИЗАЦИЯ

Проект на Lean 4 `groups/` (Mathlib v4.29.0, версия, используемая в [IMP26]) определяет $\Delta(G)$ как ядро аугментации `MonoidAlgebra  $\mathbb{Z}$  G` и $D_n(G) = \{g : g - 1 \in \Delta^n\}$ с нумерацией, принятой в литературе; `lowerCentralSeries G k` из Mathlib — это γ_{k+1} . Доказано следующее, без `sorry` и только со стандартными аксиомами `propext`, `Classical.choice`, `Quot.sound` [Lean]:

- $D_n(G)$ — нормальная подгруппа, $D_0 = D_1 = G$, ряд убывает, и $\Delta^i \Delta^j \subseteq \Delta^{i+j}$;
- коммутаторные тождества $[a, b] - 1 = a^{-1}b^{-1}((a-1)(b-1) - (b-1)(a-1))$ (для $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$) и его аналог для соглашения Mathlib; как следствие, $[D_i, D_j] \subseteq D_{i+j}$ и $\gamma_n(G) \subseteq D_n(G)$;
- функториальность D_n относительно гомоморфизмов групп;
- $D_2(G) = \gamma_2(G)$ через гомоморфизм колец $\mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z} \oplus G_{ab}$ (расширение с нулевым квадратом), убивающий Δ^2 ;
- предложение 2.1 и замечание 2.3: сначала $D_5(G) \subseteq \gamma_4(G)$ для всех G тогда и только тогда, когда $D_5(Q) = 1$ для всех Q ступени ≤ 3 ; затем, при теоремах Пасси $D_4^2 \subseteq \gamma_4$ и Грюнберга как явных гипотезах, — тогда и только тогда, когда $D_5(Q) = 1$ для всех конечных 2-групп ступени ≤ 3 , а при $D_3 = \gamma_3$ — и ступени ровно 3; ограниченному варианту для конечных G теорема Грюнберга не нужна; слово «метабелева» снято по замечанию 2.2, которое не

формализовано (`dimensionQuestion5_iff_finite_two_groups`, `dimensionQuestion5_iff_c`, `D_five_le_of_bounded`, `D_five_le_of_bounded_class_three`; файл `FiniteReduction.lean`). Конечная порождённость доказана: всякий элемент $\Delta(G)^n$ происходит из $\Delta(H)^n$ для конечно порождённой $H \leq G$;

- лемма 5.9 (присоединение центрального корня): $\mathbb{Z}[H] \cap \Delta(K)^n = \Delta(H)^n$ и $D_n(K) = D_n(H)$ при $n \geq 2$ (`D_n_eq_of_index`, файл `CentralRoot.lean`);
- предложение 5.8 во всех случаях, вместе с кольцевым утверждением $\mathbb{Z}[H] \cap \Delta(Q)^n = \Delta(H)^n$, для $Q = H\langle a, b \rangle$, где a, b поэлементно перестановочны с H и $a, b, ab \notin H$; кроме того, шаг (2) с присоединением центрального квадратного корня и вариант с $c^{2^j} \in \gamma_{j+2}(H)$ (`D_n_eq_of_dihedral`, `D_n_eq_of_sqrt`, `D_n_eq_of_central_product` и следствия из неё; файлы `CentralD8.lean`, `CentralSqrt.lean`, `CentralProduct.lean`). Переход от $(H \times E)/\{(\varphi(z), z^{-1})\}$ к такому виду и классификация E не формализованы. В формальном доказательстве для Q_8 и M_{2k+2} используется одна и та же надгруппа $(Q \times \mathbb{Z})/\langle (s, -2) \rangle$, где $s = a^2$ ($s = t$ для Q_8) и $b^2 = s^e$ ($e = 1$ для Q_8 , $e = 0$ для M_{2k+2}): образ ζ образующей $\mathbb{Z}$ удовлетворяет $\zeta^2 = s$, а $a\zeta^{-1}$, $b\zeta^{-e}$ порождают подгруппу D_8 , поэлементно перестановочную с $H\langle \zeta \rangle$;
- лемма 6.3 и предложение 6.5, где $d(Q)$ — наименьшее число порождающих (`commutator_gamma_two_le_gamma_five`, `metabelian_of_class_four`, `card_ge_of_not_metabelian`, `metabelian_of_card_le`, `rank_of_card_nine`, `type_of_card_nine`; файлы `ClassFour.lean`, `ClassFourOrder.lean`); в предложении ступень предполагается ≤ 4 , а не $= 4$. Вместо кольца Ли $L(G)$ доказательство работает в группе $G/\gamma_5(G)$, где γ_4 централен: скобки заменены на $F([a, b])$ для аддитивного $F: \gamma_4 \rightarrow \mathbb{F}_p$, не равного нулю на данном коммутаторе (он существует, так как $\gamma_4(G/\gamma_5)$ имеет экспоненту p), а оба тождества Якоби выведены из тождества Холла–Витта. Попутно доказаны $[\gamma_i, \gamma_j] \subseteq \gamma_{i+j}$, то, что группа порядка p^n порождается n элементами, и то, что в конечной p -группе из $H\gamma_2 = G$ следует $H = G$. То, что при $p = 3$ встречаются оба типа, — вычисление и не формализовано;
- теоремы 6.6 и 6.8 по модулю теоремы 6.1 Тахары [Tah81], которая входит явной гипотезой (`TaharaFiveOne`, файл `Tahara.lean`): базисы единственности, структурные константы, условия (A)–(F) и образующие выписаны как в [Tah81, с. 143, 150, 159–161], и предполагается только включение D_5 в подгруппу, порождённую элементами g (`D_five_eq_gamma_five`, `D_five_eq_gamma_five_cyclic`; файлы `ExpThree.lean`, `ExpThreePlus.lean`). В теореме 6.8 условие записано как « G/γ_2 — конечная 3-группа, кубы которой образуют циклическую группу»; для конечной абелевой 3-группы это и значит, что у неё не больше одного инварианта > 3 . Сведение к

конечной группе G/γ_5 тоже доказано. Элементы γ_3 и γ_4 сравниваются через аддитивные отображения в $\mathbb{F}_3$, а базисы единственности, согласованные с кубическим отображением, строятся из базисов $\mathbb{F}_3$ -пространств;

- включение для колец Ли $D_5(L) \subseteq \gamma_4(L)$, выведенное из `LieRings.Publication.corollaryD` авторов [IMP26].

Сформулированы как именованные утверждения со ссылками, но *не* доказаны: вопрос 1.1; $D_3 = \gamma_3$; $D_4^2 \subseteq \gamma_4$; пример Рипса; теорема Грюнберга [Gru57] в том виде, в каком она используется в предложении 2.1; оценка Тахары; два утверждения Гупты–Кузьмина из [GK92]; $D_5^2 \subseteq G''\gamma_5$ [MP09, теорема 2.28]; а также групповые аналоги теоремы С и следствия D из [IMP26] (без каких-либо утверждений об их истинности). Некоторые из них входят явными гипотезами в теоремы (как в предложении 2.1); глобально ничего не предполагается.

5. ВЫЧИСЛЕНИЯ

Весь код, исходные таблицы и проверки находятся в `compute/` репозитория <https://github.com/ispacex/dimension-subrings> (README.md, results/SUMMARY.md).

Метод. Для конечной G идеал Δ — свободная абелева группа с базисом $\{g-1\}_{g \neq 1}$, и $\Delta^n = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{b(x_i-1) : b \text{ из базиса } \Delta^{n-1}, x_i \text{ — порождающие}\}$: замыкание относительно дальнейших умножений не нужно, так как Δ — левый идеал, порождённый элементами $x_i - 1$, и $\Delta^{n-1}\mathbb{Z}[G] = \Delta^{n-1}$. Решётки вычисляются в форме Хауэлла над $\mathbb{Z}/p^E$ ($E = 30, 19, 13$ для $p = 2, 3, 5$), что для наших целей точно: из $g - 1 \notin \Delta^n + p^E\Delta$ следует $g - 1 \notin \Delta^n$, а приведённые ниже равенства $D_n = \gamma_n$ доказываются именно такими непринадлежностями (принадлежности удостоверяются отдельно проверкой $p^{E-1}\Delta \subseteq \Delta^n + p^E\Delta$). Группы берутся из библиотеки `SmallGroups` системы `GAP`; каждая группа обсчитывается до тех пор, пока не получится $D_n = 1$.

Проверки. $\gamma_n \subseteq D_n$ на каждом уровне для каждой группы; второй метод (левое умножение на представителях классов сопряжённости для p -порождающего множества) на всех группах порядков 8–64, 81, 243, 625; независимая точная эрмитова нормальная форма над $\mathbb{Z}$ в `PARI/GP` на всех группах порядков 8–64, 81 и на 12 группах порядка 128; известные значения ($\Delta^n/\Delta^{n+1} \cong G$ для циклической G , $\Delta/\Delta^2 \cong G_{ab}$). Расхождений нет.

Сита (теоремы, позволяющие пропускать группы): p -класс $\geq$ ступени нильпотентности, так что группы p -класса 2 имеют ступень ≤ 2 ; для 2-групп ступени 3 включение $D_5 \subseteq D_3 = \gamma_3$, теорема Дженнингса $D_n \subseteq M_n$ (размерные подгруппы по модулю 2) и включение Пасси $D_4^2 \subseteq \gamma_4 = 1$ дают $D_5 \subseteq \Omega_1(\gamma_3 \cap M_5)$, так что вычисление решётки нужно лишь для групп с $K = \Omega_1(\gamma_3 \cap M_5) \neq 1$; для 3-групп ступени 4 — аналогичное $K = \Omega_1(\gamma_4 \cap M_5)$, с использованием $D_4 = \gamma_4$ для групп без 2-крочения

(из включения Пасси $D_4^2 \subseteq \gamma_4$ [Pas68]) и оценки Тахары $D_5^6 \subseteq \gamma_5$ [Tah81, следствие 6.11] (оба **[на бумаге]**).

Предложение 5.1 ([компьютер]). В каждой из следующих групп $D_n(G) = \gamma_n(G)$ при всех n :

- (1) все 2-группы порядков 8, 16, 32, 64, 128 (2665 групп) и все группы порядка 256 степени ≥ 3 (24 328 групп);
- (2) все 3-группы порядков 81, 243, 729 (586 групп);
- (3) все 1202 группы порядка 3^7 степени 4, проходящие сито (двумя методами — решёткой из §5 и усечённой алгеброй Магнуса, см. открытые вопросы, — с совпадающими результатами);
- (4) все 15 групп порядка 625 (контроль).

Всякая 3-группа степени 4 порядка $3^5, 3^6, 3^7$ (6, 71, 1309 групп) метабелева (теперь это доказано, предложение 6.5, в том числе в *Lean*). Кроме того, $D_5(Q) = 1$ для всякой метабелевой группы Q порядка 512 степени 3: сито оставляет 2792 из 1 587 389 таких групп (из 1 708 439 групп порядка 512 и p -класса ≥ 3), и для каждой из этих 2792 вычисление решётки даёт $D_4(Q) = D_5(Q) = 1$.

Порядок 2^{10} . Этого порядка в SmallGroups нет, а породить все 2-группы степени 3 такого порядка нереально: при ранге ≥ 4 дерево порождения p -групп насчитывает миллионы вершин уже на порядке 2^9 . Вместо этого полный результат для порядка 2^9 сужает перебор до нескольких тысяч кандидатов.

Обозначения. $P_1(Q) = Q$, $P_{i+1}(Q) = [P_i(Q), Q] P_i(Q)^2$ — нижний экспоненциально-2 центральный ряд; 2-класс группы Q — наименьшее c с $P_{c+1}(Q) = 1$; $M_n(Q) = Q \cap (1 + \Delta_{\mathbb{F}_2}(Q)^n)$ — размерные подгруппы по модулю 2, $M_n = \prod_{i \geq n} \gamma_i^{2^j}$ (Дженнингс [Jen41], Лазар). Если 2-класс Q равен $c \geq 2$, то Q — непосредственный потомок группы $Q/P_c(Q)$ шага $\log_2 |P_c(Q)|$; алгоритм порождения p -групп [OBr90] в реализации ANUPQ [GNO] пересчитывает всех непосредственных потомков данной группы данного шага с точностью до изоморфизма.

Лемма 5.2 (о минимальном контрпримере). Пусть Q — конечная 2-группа степени 3, и $D_5(Q/N) = 1$ для всякой центральной подгруппы N порядка 2. Если $D_5(Q) \neq 1$, то

- (a) центр $Z(Q)$ циклический и $D_5(Q) = \Omega_1(Z(Q)) = \langle n \rangle$ имеет порядок 2;
- (b) $n \in \gamma_3(Q) \cap M_5(Q)$;
- (c) 2-класс c группы Q не меньше 4, и $P_c(Q) = \langle n \rangle$;
- (d) Q — непосредственный потомок шага 1 группы $R = Q/\langle n \rangle$, у которой степень 2 или 3, 2-класс $c-1 \geq 3$ и $\gamma_3(R)$ циклическая.

Доказательство [на бумаге]. (a) Пусть $N \leq Z(Q)$, $|N| = 2$. Проекция $Q \rightarrow Q/N$ переводит $D_5(Q)$ в $D_5(Q/N) = 1$, поэтому $D_5(Q) \subseteq N$. Значит, нетривиальная $D_5(Q)$ совпадает с каждой центральной подгруппой

порядка 2: такая подгруппа одна, $\Omega_1(Z(Q))$ имеет порядок 2, абелева 2-группа $Z(Q)$ циклическая и $D_5(Q) = \Omega_1(Z(Q))$. (b) $D_5 \subseteq D_3 = \gamma_3$, и $D_5(Q) \subseteq M_5(Q)$, так как $\mathbb{Z}[Q] \rightarrow \mathbb{F}_2[Q]$ переводит Δ^5 в $\Delta_{\mathbb{F}_2}^5$. (c) Поскольку $\gamma_i \subseteq P_i$ и $P_i^2 \subseteq P_{i+1}$, имеем $\gamma_i^{2^j} \subseteq P_{i+j}$, а из $i2^j \geq 5$ следует $i + j \geq 4$. Значит, $M_5 \subseteq P_4$, и $1 \neq n \in P_4(Q)$ даёт $c \geq 4$. Подгруппа $P_c(Q)$ нетривиальна, центральна и элементарна абелева, поэтому совпадает с $\Omega_1(Z(Q)) = \langle n \rangle$. (d) По (c) $R = Q/P_c(Q)$, шаг равен 1, и 2-класс R равен $c - 1 \geq 3$. Степень R не больше 3; если бы R была абелевой, то $\gamma_2(Q) \subseteq \langle n \rangle \subseteq Z(Q)$ и степень Q была бы ≤ 2 . Наконец, $\gamma_3(R)$ — фактор-группа циклической $\gamma_3(Q) \subseteq Z(Q)$. $\square$

Предложение 5.3 ([компьютер + на бумаге]). $D_5(Q) = 1$ для всякой 2-группы Q порядка 2^{10} степени 3 (все они метабелевы, замечание 2.2).

Доказательство. Пусть у такой группы Q имеем $D_5(Q) \neq 1$. Для всякой центральной N порядка 2 фактор-группа Q/N имеет порядок 2^9 и степень ≤ 3 , поэтому $D_5(Q/N) = 1$: по предложению 5.1 при степени 3 и в силу $D_5 \subseteq D_3 = \gamma_3 = 1$ при степени ≤ 2 . По лемме 5.2 группа Q изоморфна непосредственному потомку шага 1 некоторой группы R порядка 2^9 степени 2 или 3 с 2-классом ≥ 3 и циклической $\gamma_3(R)$; при этом у Q степень 3, центр циклический, и его инволюция n лежит в $\gamma_3(Q) \cap M_5(Q)$. **[компьютер]** В библиотеке SmallGroups таких групп R ровно 1422862. Для каждой ANUPQ (GAP 4.15.1, ANUPQ 3.3.2) перечисляет непосредственных потомков шага 1 с точностью до изоморфизма, всего 1819675 групп; из них 88809 имеют степень 3, и ровно у 3400 из них центр циклический, а его инволюция лежит в $\gamma_3 \cap M_5$ (по рангам $d(Q) = 2, 3, 4, 5, 6$: 15, 301, 2756, 319, 9; ранга 7 нет). Для каждой из этих 3400 вычисление решётки из §5 даёт $D_4(Q) = D_5(Q) = 1$ и даже $D_n(Q) = \gamma_n(Q)$ при всех n . Это противоречит $D_5(Q) \neq 1$. $\square$

Проверки перебора порядка 2^{10} . Тот же путь на порядках $2^6, \dots, 2^9$ (родители из SmallGroups вдвое меньшего порядка) сравнивался с прямым проходом по SmallGroups этого порядка: числа групп степени 3 с $|P_c| = 2$ и 2-классом ≥ 4 (3, 27, 320, 4185), из них с циклическим центром, и кандидатов (3, 11, 64, 308) совпадают, в том числе по рангам. Второй метод решётки (усечённая алгебра Магнуса из открытых вопросов, по рс-копредставлению, то есть независимо от таблицы умножения) даёт тот же ответ на 3391 кандидате из 3400. Перебор занял 62,9 процессорных часа в GAP, решётки — 21,3 часа. Код, доказательство леммы, таблицы по кускам и по кандидатам: `compute/pq1024 (README.ru.md, раздел «Итог: порядок  $2^{10}$  закрыт», и results/)`.

Теорема 5.4 ([компьютер + на бумаге]). (1) $D_5(G) \subseteq \gamma_4(G)$ для всякой конечной группы G , силовская 2-подгруппа которой имеет порядок не больше 2^{10} ; в частности, для всякой группы порядка меньше 2048.

- (2) $D_n(G) = \gamma_n(G)$ при всех n для всякой конечной группы G порядка меньше 512.
- (3) $D_5(G)/\gamma_5(G)$ не имеет 3-кручения для всякой конечной группы G , силовская 3-подгруппа которой имеет порядок не больше 3^7 ; более того, $D_5(Q) = \gamma_5(Q)$ для всякой 3-группы Q порядка не больше 3^7 . (До 3^9 — теорема 6.12.)

Доказательство. (1) следует из замечания 2.3 и предложений 5.1 и 5.3: все метабелевы 2-группы ступени 3 порядка $\leq 2^{10}$ охвачены (порядки $\leq 2^8$ — решёткой для всех групп, 2^9 — ситом и решёткой, 2^{10} — леммой 5.2, ANUPQ и решёткой). Для (2) и (3): конечная нильпотентная группа есть прямое произведение своих силовских подгрупп, а D_n, γ_n согласованы с прямыми произведениями; для ненильпотентной конечной G всё сводится к нильпотентным фактор-группам $G/\gamma_m(G)$ [на бумаге; стандартно, см. [MP09]]; у групп порядка < 512 2-часть $\leq 2^8$, 3-часть $\leq 3^5$ и p -часть $\leq p^3$ при $p \geq 5$, а там ступень ≤ 2 делает всё тривиальным. Для 3-части в (3): если Q — 3-группа порядка $\leq 3^7$, то $Q/\gamma_5(Q)$ имеет ступень ≤ 4 и порядок $\leq 3^7$, а потому метабелева (ступень ≤ 3 — всегда, замечание 2.2; ступень 4 — по предложению 5.1), и теорема Гупты–Тахары [GT85, теорема 3.2(c)] ($D_{p+2} = \gamma_{p+2}$ для конечно порождённых метабелевых p -групп при нечётном p) даёт $D_5(Q/\gamma_5) = 1$, т. е. $D_5(Q) \subseteq \gamma_5(Q)$. Это заменяет вычисление решёток для 1202 кандидатов порядка 3^7 (из которых в п. (3) предложения 5.1 проверена выборка). Редукция для ненильпотентных групп в (2)–(3) стандартная и здесь не расписана. $\square$

Наблюдения. Во всякой обчислитанной группе ступени s имеем $D_{s+1} = 1$ и $D_k = \gamma_k$ на каждом шаге. Для метабелевых групп ступени 3 сито Дженнинга отсеивает почти всё (порядки 64, 128, 256, 512: 111/114, 1116/1137, 21 105/21 325, 1 584 597/1 587 389), и у оставшихся уже $D_4 = 1$. Для 3-групп ступени 4 сито отсеивает мало (9/71 при порядке 729, 107/1309 при порядке 2187). Время вычислений: около 3,6 часа по настенным часам, около 30–40 процессорных часов.

Замечание 5.5 (отсев в дереве порождения; MATH-40). Пусть Q — конечная 2-группа ступени 3 с циклическим центром, $d = d(Q)$, $C = C_Q(\gamma_2(Q))$, $X = \gamma_2(Q)/(\gamma_2(Q) \cap Z(Q))$. Коммутатор задаёт невырожденное билинейное спаривание $X \times Q/C \rightarrow \gamma_3(Q)$ со значениями в циклической группе $\gamma_3(Q) \leq Z(Q)$; поэтому $X \cong Q/C$ — фактор-группа Q_{ab} , и ранг X не больше $\min(d, d(d-1)/2)$. Если $|\gamma_3(Q)| = 2^e$, то у Q_{ab} два инварианта $\geq 2^e$ (отображение $(u, v) \mapsto [u, v, z]$ пропускается через $\Lambda^2 Q_{ab}$), а в X есть элемент порядка $\geq 2^e$. Для минимального контрпримера Q (лемма 5.2) с центральной инволюцией n отсюда получаются условия на всякую фактор-группу $V = Q/N$, $N \leq \Phi(Q)$ (для второго — $n \in N \leq \Phi(Q)$), которые переходят на дальнейшие фактор-группы и потому позволяют отсекалть целые поддеревья дерева порождения p -групп: (i) существует циклическая K , $\gamma_3(V) \leq K \leq \gamma_2(V) \cap Z(V)$, с $\text{rk}(\gamma_2(V)/K) \leq \min(d, d(d-$

1)/2); (ii) для такой K выполнено $|Q| \geq 2|K| |A \vee B \vee E_1| |A \vee V_{ab} \vee E_2|$, где $A = \gamma_2(V)/K$, $B = V/C_V(\gamma_2(V))$, $E_1 = \mathbb{Z}/2^{e_V+1}$, $E_2 = E_1^2$, $2^{e_V} = |\gamma_3(V)|$, а $\vee$ — покомпонентный максимум абелевых инвариантов. В частности, у всякой такой V степени 3 имеем $d + 4e_V + 2 \leq \log_2 |Q|$. **[на бумаге]** (доказательства в `compute/pq2048/README.md`). Условие (i) пусто при $d \leq 3$ и на порядках меньше 2^{2d+1} ; отсекает условие (ii).

Дальнейшее. На порядке 2^{11} тот же довод требует в качестве родителей группы порядка 2^{10} степени ≤ 3 с циклической γ_3 ; в SmallGroups их нет, а по грубой экстраполяции их $0,5\text{--}1,1 \cdot 10^9$. Замечание 5.5 отсекает целые поддеревья, не теряя кандидатов (проверено: те же 3, 11, 64, 308 кандидатов на порядках $2^6\text{--}2^9$), и по выборке оставляет $10^5\text{--}2 \cdot 10^6$ родителей; их порождение всё ещё стоит около 100 процессорных суток, в основном на ранге 5 **[компьютер; оценка]**. Ранги 2, 3 и 4 прогнаны до порядка 2^{11} : 17, 586 и 52 568 кандидатов, у всех $D_4 = D_5 = 1$ **[компьютер]**. Для ранга 4 обход проходит через 2 756 кандидатов порядка 2^{10} — ровно столько, сколько их у ранга 4 в предложении 5.3; родителей порядка 2^{10} осталось 52 181 (отсечено 9 937, 136 127, 946 663 вершин на порядках 2^8 , 2^9 , 2^{10}), дерево заняло около 15 процессорных часов, решётки — 4,6 (код: `compute/pq2048, run_rank.sh`). Использованный там перебор с отсевом проверен на порядке 2^{10} : он воспроизводит ровно 3400 кандидатов предложения 5.3, в том числе по рангам, оставляя 4,2% родителей. Рангам ≥ 8 перебор не нужен (предложение 5.7 ниже). Итак, на порядке 2^{11} открытыми остаются ранги 5–7 **[открыто]**. На ранге 7 обход останавливается на потомках шага 2 группы $(\mathbb{Z}/2)^7$: стандартный ANUPQ падает там с переполнением целого, как и на ранге 8; следующий — ранг 6; ранг 5, основная часть затрат, планируется на добровольных вычислениях (BOINC).

Порядок 2^{11} , ранг ≥ 8 . Назовём 2-группу Q кандидатом, если её степень равна 3, центр циклический и его инволюция n лежит в $\gamma_3(Q) \cap M_5(Q)$, а 2-класс $c \geq 4$ и $P_c(Q) = \langle n \rangle$. По лемме 5.2 и предложению 5.3 всякая 2-группа порядка 2^{11} степени 3 с $D_5 \neq 1$ — кандидат (её фактор-группы по центральным подгруппам порядка 2 имеют порядок 2^{10} и степень ≤ 3).

Лемма 5.6. *Не существует кандидата Q порядка 2^{11} с $Q/P_3(Q) \cong \mathbb{Z}/4 \times (\mathbb{Z}/2)^7$.*

Доказательство [на бумаге]. Ранг такой группы Q равен 8, поэтому $|P_2(Q)| = |\Phi(Q)| = 8$; ряд $P_2 \supseteq P_3 \supseteq P_4 \supseteq P_c \neq 1$ строго убывает, пока не дойдёт до 1, откуда $|P_3(Q)| = 4$ и $P_4(Q) = \langle n \rangle$. (1) Q/P_3 абелева, поэтому $\gamma_2(Q) \leq P_3(Q)$. (2) Степень Q равна 3, поэтому $\gamma_3 = [\gamma_2, Q] \neq 1$, и $\gamma_3 \neq \gamma_2$, так как Q нильпотентна и $\gamma_2 \neq 1$. Значит, $|\gamma_2| = 4$, $\gamma_2 = P_3$, $|\gamma_3| = 2$ и $\gamma_3 = \langle n \rangle$ — единственная центральная подгруппа порядка 2. (3) $M_5(Q) = \prod_{i \geq 5} \gamma_i^{2^i} = Q^8 \gamma_2^4 \gamma_3^2 = Q^8$, так как $\gamma_4 = 1$, $|\gamma_2| = 4$ и $|\gamma_3| = 2$. (4) Экспонента Q/P_3 равна 4, поэтому $Q^4 \leq P_3$ и $Q^8 \leq P_3^2 \leq P_4 = \langle n \rangle$. (5)

Поскольку $n \in M_5(Q) = Q^8$, найдётся $x \in Q$ с $x^8 = n$. Тогда $x^4 \in P_3 = \gamma_2$ имеет порядок 4, и $\gamma_2 = \langle x^4 \rangle$. (6) Для $g \in Q$ имеем $[x, g] \in \gamma_2$, подгруппа γ_2 абелева, а γ_3 центральна, поэтому $[x, g]^{x^i} = [x, g][x, g, x]^i$ и

$$[x^k, g] = \prod_{i < k} [x, g]^{x^i} = [x, g]^k [x, g, x]^{k(k-1)/2}.$$

При $k = 4$ получаем $[x, g]^4 [x, g, x]^6 = 1$: экспонента γ_2 делит 4, а $|\gamma_3| = 2$. Значит, x^4 централен. (7) Тогда $\gamma_2 = \langle x^4 \rangle \leq Z(Q)$ и $\gamma_3 = [\gamma_2, Q] = 1$, что противоречит ступени 3. $\square$

Предложение 5.7 ([компьютер + на бумаге]). $D_5(Q) = 1$ для всякой 2-группы Q порядка 2^{11} ступени 3 ранга $d(Q) \geq 8$.

Доказательство. Пусть это не так; тогда Q — кандидат, и $|\Phi(Q)| = 2^{11-d}$. Поскольку $s \geq 4$, строго убывающий ряд $P_2 \supsetneq P_3 \supsetneq P_4 \neq 1$ даёт $|\Phi(Q)| \geq 8$, то есть $d \leq 8$: ранг ≥ 9 невозможен **[на бумаге]**. Пусть $d = 8$. Тогда, как в доказательстве леммы 5.6, $s = 4$, $|P_3(Q)| = 4$ и $P_4(Q) = \langle n \rangle$; значит, $V = Q/P_3(Q)$ имеет порядок 2^9 , ранг 8 и 2-класс 2, а $R = Q/\langle n \rangle$ — непосредственный потомок V шага 1. Более того, ступень R равна 2: будь она равна 3, замечание 5.5(ii), применённое к R , дало бы $d + 4e_R + 2 \leq 11$ при $e_R \geq 1$, то есть $d \leq 5$ **[на бумаге]**. **[компьютер]** Группы порядка 2^9 ранга 8 — это 12 групп SmallGroup(512, i), $10\,494\,201 \leq i \leq 10\,494\,212$ (группа V ранга n с $|\Phi(V)| = 2$ задаётся отображением возведения в квадрат $q: V/\Phi(V) \rightarrow \Phi(V)$ — ненулевой квадратичной формой на $\mathbb{F}_2^n$, поляризация которой есть форма коммутирования; поэтому такие группы отвечают классам эквивалентности ненулевых квадратичных форм. Если поляризация имеет ранг $2k$ и радикал R , то при $q|_R = 0$ для каждого $1 \leq k \leq n/2$ есть два класса (инвариант Арфа 0 или 1), а при $q|_R \neq 0$ — по одному классу для каждого $0 \leq k < n/2$; всего $2\lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/2 \rfloor$ классов, при $n = 8$ это 12. Та же формула даёт числа групп порядка 2^{n+1} ранга n в SmallGroups при $n = 2, \dots, 7$: 3, 4, 6, 7, 9, 10). Из 11 неабелевых у 10 ядро (nucleus) тривиально, и потому непосредственных потомков у них нет вовсе [OBr90]; у SmallGroup(512, 10 494 202) ядро одномерно, но все её непосредственные потомки ступени ≤ 3 имеют ступень 3, так что потомка R ступени 2 у неё нет. И то и другое читается по p -накрывающей группе, без вычисления групп автоморфизмов; оба правила с доказательствами — в compute/pq2048/README.ru.md (раздел «Вершины без потомков», правила 0 и 2) **[на бумаге]**, там же их сверка с полным перебором ANUPQ. Оставшаяся группа SmallGroup(512, 10 494 201) $\cong \mathbb{Z}/4 \times (\mathbb{Z}/2)^7$ исключается леммой 5.6. $\square$

Независимая проверка ранга 8 прямым порождением с этим согласуется: на $\mathbb{Z}/4 \times (\mathbb{Z}/2)^7$ штатному ANUPQ, по оценке, нужно около 20 ГБ (прогон был снят на 7 ГБ), а версия с исправлением расхода памяти проходит её за 2,1 ГБ и находит 8 непосредственных потомков порядка

2^{10} ; обход от всех 12 групп не даёт ни одного кандидата порядка 2^{11} [компьютер].

Центральные произведения. Поиск за порядком 2^{11} может пропускать кандидатов, раскладывающихся в центральное произведение с малым множителем. Пусть E — конечная 2-группа класса 2 с $E/Z(E) \cong (\mathbb{Z}/2)^2$ и циклическим центром. Заменим E подгруппой, порождённой поднятиями a, b базиса $E/Z(E)$; центральное произведение ниже от этого не меняется. Тогда $E \in \{D_8, Q_8\}$ или $E \cong M_{2^{k+2}} = \langle a, b \mid a^{2^{k+1}} = b^2 = 1, a^b = a^{1+2^k} \rangle$, $k \geq 2$, и $Z(E) = \langle a^2 \rangle$ [на бумаге]. Для вложения $\varphi: Z(E) \rightarrow Z(H)$ положим $H \circ E = (H \times E)/\{(\varphi(z), z^{-1})\}$, $t = \varphi([a, b])$ и, при $E = M_{2^{k+2}}$, $s = \varphi(a^2)$.

Предложение 5.8 ([Lean]). Пусть H — группа, $t \in \gamma_2(H)$, $n \geq 2$.

- (1) Если $E \in \{D_8, Q_8\}$, то $D_n(H \circ E) = D_n(H)$.
- (2) Пусть $E = M_{2^{k+2}}$ и для некоторого $g \in H$ элемент $s = g^{-2}s$ удовлетворяет $c^{2^j} - 1 \in \Delta(H)^{j+2}$ при всех $j \geq 0$ (например, $c^{2^j} \in \gamma_{j+2}(H)$). Тогда $D_n(H \circ E) = D_n(H)$. В частности, так будет, если $s = g^2$ для некоторого $g \in H$, центрального или нет ($c = 1$), и если $s \in \gamma_2(H)$, $s^2 \in \gamma_3(H)$ ($g = 1$, $k = 2$).

Доказательство. Пусть $Q \geq H$ — одна из групп ниже, порождённая H и элементами, перестановочными с H , и $\gamma_2(Q) = \gamma_2(H)$. Тогда $D_n(Q) \subseteq \gamma_2(Q) \subseteq H$ и $D_n(H) \subseteq D_n(Q)$, так что равенство $D_n(Q) = D_n(H)$ следует из $\mathbb{Z}[H] \cap \Delta(Q)^n \subseteq \Delta(H)^n$. Для этого достаточно левого $\mathbb{Z}[H]$ -линейного $q: \mathbb{Z}[Q] \rightarrow \mathbb{Z}[H]$, тождественного на $\mathbb{Z}[H]$, с $q(\Delta(Q)^n) \subseteq \Delta(H)^n$. Здесь $\gamma_2(H \circ E) = \gamma_2(H)\langle t \rangle = \gamma_2(H)$.

(1) Пусть $E = D_8$, $c = [a, b]$, $\tau = c - 1$ (так что $\tau^2 = -2\tau$), и $N = \mathbb{Z}[E/\langle b \rangle]$ — свободный $\mathbb{Z}[\langle c \rangle]$ -модуль с базисом e_0 , $f = ae_0 - e_0$. Тогда $\mathbb{Z}[H] \otimes_{\mathbb{Z}[\langle c \rangle]} N$ — $\mathbb{Z}[Q]$ -модуль, и годится $q(u) = (\text{id} \otimes p)(u(1 \otimes e_0))$, где $p(xe_0 + yf) = x$. Действительно, $\Delta(Q)^n$ натянут на произведения i сомножителей из $\Delta(H)$ и $n - i$ из $\Delta(E)$, а на N в координатах (x, y) имеем $a - 1: (x, y) \mapsto (0, x - 2y)$ и $b - 1: (x, y) \mapsto (\tau y, \tau y)$. Индукцией $p(\Delta(E)^j N) = \tau^{\lceil j/2 \rceil} \mathbb{Z}[\langle c \rangle]$ при $j \geq 1$; так как $t - 1 \in \Delta(H)^2$, получаем $q(\Delta(Q)^n) \subseteq \sum_i \Delta(H)^i (t - 1)^{\lceil (n-i)/2 \rceil} \subseteq \Delta(H)^n$. Для Q_8 : в D_8 элемент $u = ab$ имеет $u^2 = t$, поэтому $H' = H\langle u \rangle \leq H \circ D_8$ и $D_n(H') = D_n(H)$. Пусть a', b' — образующие множителя D_8 в $H' \circ D_8$; элементы $a'u, b'u$ порождают Q_8 , пересекающуюся с H' по $\langle t \rangle$. Значит, $H \circ Q_8 \leq H' \circ D_8$ и, по (1) для H' , $D_n(H \circ Q_8) \subseteq D_n(H') \cap H = D_n(H)$.

(2) Пусть $H'' = H\langle r \rangle$, где r централен, $r^2 = s$ и $\langle r \rangle \cap H = \langle s \rangle$. Если a', b' — образующие множителя D_8 в $H'' \circ D_8$, то элементы $a'r, b'$ порождают копию E , пересекающуюся с H'' по $\langle s \rangle$, а внутри $H \circ E$ имеем $H\langle a \rangle \cong H''$. По (1) $D_n(H \circ E) = D_n(H'')$. Далее, $\mathbb{Z}[H''] = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[H]r$; положим $q(u_0 + u_1 r) = u_0 + u_1 g$. Поскольку r централен, $\Delta(H'')^n = \sum_i \Delta(H)^{n-i} (r-1)^i \mathbb{Z}[H'']$, и достаточно, чтобы $f_i = q((r-1)^i) \in \Delta(H)^i$ при всех i . В абелевой группе $\langle g, s, r \rangle$ положим $y = rg^{-1}$, так что $y^2 = s$, и $x =$

$g-1, \eta = y-1, \tau = c-1$. Тогда $r-1 = x+\eta+x\eta$ и $f_i = \sum_{\alpha+\beta \geq i} m_{\alpha\beta} x^\alpha e_\beta$, где $e_b = \pi(\eta^b)$, $\pi(v_0 + v_1 y) = v_0 + v_1$. Из $\eta^2 = \tau - 2\eta$ получаем $e_1 = 0$, $e_2 = \tau$ и $e_{b+2} = \tau e_b - 2e_{b+1}$. Тожество $2(c^{2^j} - 1) = (c^{2^{j+1}} - 1) - (c^{2^j} - 1)^2$ и условие дают $2^m \tau \in \Delta(H)^{m+2}$ при всех m . Отсюда индукцией по $b \geq 1$ получаем $2^m e_b \in \Delta(H)^{b+m}$ при всех m , в частности $e_b \in \Delta(H)^b$. $\square$

Условие $c \in \gamma_2(H)$, то есть $s \in \Phi(H)$ для 2-группы, из метода не убрать: при $s \notin \Phi(H)$ никакое такое q для H'' не удовлетворяет $q(\Delta(H'')^2) \subseteq \Delta(H)^2$ [на бумаге]. [компьютер] У 386 кандидатов H порядков 2^6-2^9 выполнено $t = n \in \gamma_3(H)$. У 291 из них $|Z(H)| \geq 8$, и s — квадрат в циклической $Z(H)$. Из 95 кандидатов с $Z(H) \cong \mathbb{Z}/4$ у 78 выполнено $s \in \gamma_2(H)$ и $s^2 \in \gamma_3(H)$, а у остальных 17 имеем $s = g^2$ с нецентральным $g \in H$. Поэтому по предложению 5.8 $D_n(H \circ E) = D_n(H)$ для всех них, всех n и $E \in \{D_8, Q_8, M_{16}\}$. Независимо от этого вычисление решёток даёт $D_4 = D_5 = 1$ для всех 1544 таких произведений.

Склейка по собственной подгруппе. Для $C \leq Z(E)$ и вложения $\varphi: C \rightarrow Z(H)$ положим $H \circ_C E = (H \times E) / \{(\varphi(z), z^{-1}) : z \in C\}$. Тогда $H' = HZ(E)$ централизует E , $H \circ_C E = H' \circ E$ — склейка по всему $Z(E)$ (здесь φ — вложение, так что $s = a^2 \in H'$ при $E = M_{2^{k+2}}$), и $\gamma_i(H') = \gamma_i(H)$ при $i \geq 2$. При $E = M_{2^{k+2}}$ произведение $H' \circ E$ записывается как $H \circ_C E$ с $C \neq Z(E)$ ровно тогда, когда $s \notin \Phi(H')$, а тогда метод п. (2) для H' по замечанию выше не работает. Проектировать приходится не на H' , а на H .

Лемма 5.9 ([Lean]). Пусть $K = H\langle r \rangle$, где r централен, $|K : H| = m$ и $r^m = \sigma = g^m$ для некоторого $g \in H$, не обязательно центрального. Тогда $\mathbb{Z}[H] \cap \Delta(K)^n = \Delta(H)^n$ при всех n и $D_n(K) = D_n(H)$ при $n \geq 2$.

Доказательство. $\mathbb{Z}[K] = \bigoplus_{0 \leq j < m} \mathbb{Z}[H]r^j$; положим $q(\sum_j u_j r^j) = \sum_j u_j g^j$. Так как $r^m = g^m \in H$, имеем $q(ur^j) = ug^j$ при всех $j \in \mathbb{Z}$, и потому $q(up(r)) = up(g)$ для всякого многочлена Лорана p . Поскольку r централен, $\Delta(K)^n$ натянут на $x(r-1)^i r^j$ с $x \in \Delta(H)^{n-i}$, а $q(x(r-1)^i r^j) = x(g-1)^i g^j \in \Delta(H)^n$. Значит, $\mathbb{Z}[H] \cap \Delta(K)^n = q(\mathbb{Z}[H] \cap \Delta(K)^n) \subseteq \Delta(H)^n$; обратное включение очевидно, а остальное следует из $D_n(K) \subseteq \gamma_2(K) = \gamma_2(H) \subseteq H$. $\square$

При $m = 2$ это случай $c = 1$ предложения 5.8(2). Пусть $E = M_{2^{k+2}}$, $C = \langle a^{2^{j+1}} \rangle$, $1 \leq j < k$, и $\sigma = \varphi(a^{2^{j+1}})$. Если $t \in \gamma_2(H)$ и $\sigma = g^{2^{j+1}}$ для некоторого $g \in H$, то $D_n(H \circ_C E) = D_n(H)$ при $n \geq 2$ [на бумаге]: в доказательстве (2) для H' получается $H'' = H'\langle r \rangle = H\langle r \rangle$ с $r^{2^{j+1}} = \sigma$ и $\langle r \rangle \cap H = \langle \sigma \rangle$, так что $|H'' : H| = 2^{j+1}$, и применима лемма 5.9 с $m = 2^{j+1}$. Например, для $H \circ_{\langle t \rangle} M_{16}$ нужно $t = g^4$. Условие $t \in \gamma_2(H)$ для поиска ничего не стоит: если $H \circ_C E$ — кандидат, то t — инволюция его циклического центра, и $t = n \in \gamma_3(H \circ_C E) = \gamma_3(H)$. [компьютер] Из 386 кандидатов порядков 2^6-2^9 в центральное произведение раскладываются 20 (5 порядка 2^8 и 15 порядка 2^9), всего с 212 множителями E .

Склейка собственная в 16 из этих разложений, принадлежащих 4 кандидатам, всегда с M_{32} или M_{64} ; лемма 5.9 покрывает 4 из них. У каждого из 20 кандидатов есть и разложение, покрытое предложением 5.8, так что на этих порядках поиску, пропускающему раскладывающихся кандидатов, собственная склейка не нужна (код: `compute/central`, `decomp.g`; вики, МАТН-186). Остальным 12 разложениям нужен аналог (2) для $m = 4$ (при максимальной $H < H'$, то есть $j = 1$) с $g^{-4}\sigma \neq 1$; в общем случае он не получается проекцией на H : для $Q = D_8 \circ_{\langle t \rangle} M_{16}$ имеем $\mathbb{Z}[D_8] \cap \Delta(Q)^n \neq \Delta(D_8)^n$ при $n = 4, 5$ (индекс 4), хотя $D_n(Q) = D_n(D_8)$ [компьютер] [открыто].

3-кручение. Для 3-кручения вычисление до порядка 3^7 больше не нужно (теорема 5.4(3)); порядки 3^8 и 3^9 и бесконечное семейство разобраны в §6. Фактор-группы известных примеров (Рипс, $D_4 \neq \gamma_4$ при порядке 2^{38} ; Бартольди–Михайлов при порядке 3^{494}) могли бы откалибровать, насколько далеко должен находиться контрпример к вопросу 1.1.

6. 3-КРУЧЕНИЕ: ПОРЯДКИ 3^8 И 3^9 И ГРУППЫ С G/γ_2 ЭКСПОНЕНТЫ 3

Теорема 5.4(3) закрывает 3-кручение до порядка 3^7 за счёт метабелевости. Здесь мы идём дальше: доказываем $D_5 = \gamma_5$ для всех 3-групп порядка $\leq 3^9$ (теорема 6.12) и, на бумаге, для всякой конечной 3-группы Q с $Q/\gamma_2(Q)$ экспоненты 3 любого порядка (теорема 6.6). Подробности, вычисления и две независимые построчные рецензии — в нашей вики (МАТН-120, МАТН-127); код — в `compute/magnus`. Всюду *min* группы Q ступени s — это $(a_1, \dots, a_s)$, где $p^{a_i} = |\gamma_i(Q)/\gamma_{i+1}(Q)|$, а $L(Q) = \bigoplus_i \gamma_i/\gamma_{i+1}$ — её кольцо Ли.

Лемма 6.1. Пусть p нечётно и Q — конечная p -группа ступени $\leq p+1$. Тогда $D_{p+2}(Q) \subseteq Q'' \cap M_{p+2}(Q)$. В частности, при $p = 3$ и ступени ≤ 4 имеем $D_5(Q) \subseteq Q'' \cap M_5(Q)$, так что для $D_5(Q) \neq 1$ нужно $Q'' \neq 1$, а значит, $d(Q) \geq 3$.

Доказательство [на бумаге]. Q/Q'' метабелева ступени $\leq p+1$, поэтому $D_{p+2}(Q/Q'') = \gamma_{p+2}(Q/Q'') = 1$ по [GT85, теорема 3.2], и $D_{p+2}(Q) \subseteq Q''$ по функториальности. $D_n \subseteq M_n$, так как $\mathbb{Z}[Q] \rightarrow \mathbb{F}_p[Q]$ переводит Δ^n в $\Delta_{\mathbb{F}_p}^n$. Если $d(Q) \leq 2$, то γ_2/γ_3 циклична и $Q'' \subseteq \gamma_5 = 1$ (см. лемму 6.3). $\square$

Это заменяет ссылку на [MP09, теорема 2.28] в абзаце о 3-кручении в §5.

Лемма 6.2 (о минимальном контрпримере, $p = 3$). Пусть Q — 3-группа наименьшего порядка с $D_5(Q) \neq \gamma_5(Q)$. Тогда Q имеет ступень 4, $Q'' \neq 1$ и $d(Q) \geq 3$; центр $Z(Q)$ цикличен и $D_5(Q) = \Omega_1(Z(Q)) = \langle z \rangle$ имеет порядок 3, причём $z \in Q'' \cap M_5(Q)$; последний нетривиальный член $P_c(Q)$ нижнего экспоненциально-3-центрального ряда равен $\langle z \rangle$, так что Q — непосредственный потомок шага 1 группы $Q/\langle z \rangle$.

Доказательство [на бумаге]. Будь ступень Q не меньше 5, меньшим контрпримером была бы $Q/\gamma_5(Q)$; при ступени ≤ 3 имеем $D_5 \subseteq D_4 = \gamma_4 = 1$ (Пасси: $D_4 = \gamma_4$ при отсутствии 2-крючения [Pas68]). Итак, ступень Q равна 4, и по лемме 6.1 $1 \neq D_5(Q) \subseteq Q'' \cap M_5(Q)$. Остальное — рассуждение леммы 5.2: $D_5(Q)$ лежит в каждой нормальной N с $D_5(Q/N) = 1$, в частности в каждой центральной подгруппе порядка 3. $\square$

Лемма о кольцах Ли.

Лемма 6.3. Пусть p нечётно и G — группа, у которой $|\gamma_3(G)/\gamma_4(G)| = p$, а $\gamma_2(G)/\gamma_3(G)$ порождается не более чем двумя элементами. Тогда $[\gamma_2(G), \gamma_2(G)] \subseteq \gamma_5(G)$. В частности, при ступени ≤ 4 группа G метабелева.

Доказательство [на бумаге; Lean] (в Lean то же вычисление проведено в группе $G/\gamma_5(G)$, §4). Образ $[\gamma_2, \gamma_2]$ в γ_4/γ_5 порождён скобками $[L_2, L_2] \subseteq L_4$ кольца $L = L(G)$, так что достаточно доказать $[L_2, L_2] = 0$. Если L_2 циклична, знакопеременная скобка $L_2 \times L_2 \rightarrow L_4$ равна нулю. Иначе $pL_3 = 0$, откуда $pL_4 = 0$ ($L_4 = [L_3, L_1]$), и фактор L по идеалу $pL_1 \oplus pL_2 \oplus 0 \oplus H \oplus L_{\geq 5}$, где $H \subset L_4$ — гиперплоскость, не содержащая данную ненулевую скобку $[u, v]$, есть градуированная $\mathbb{F}_p$ -алгебра Ли $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_4$, порождённая M_1 , с $\dim M_2 = 2$, $\dim M_3 = \dim M_4 = 1$ и $[M_2, M_2] \neq 0$. Покажем, что так не бывает.

Запишем $[z, z'] = \omega(z, z')w$ для $z, z' \in M_2$, $M_4 = \langle w \rangle$, $M_3 = \langle t \rangle$, $[x, t] = \varphi(x)w$, $[x, z] = \beta(x, z)t$ и $[x, y] = \alpha(x, y)$ для $x, y \in M_1$, $z \in M_2$. Ненулевая знакопеременная форма на плоскости невырождена, значит, такова и ω ; $\varphi \neq 0$, так как $M_4 = [M_1, M_3]$. Выберем e с $\varphi(e) = 1$ и положим $K = \ker \varphi$. Тождество Якоби для $x, y \in M_1$, $z \in M_2$ даёт

$$\omega(\alpha(x, y), z) = \varphi(x)\beta(y, z) - \varphi(y)\beta(x, z).$$

При $x, y \in K$ правая часть равна нулю, так что $\alpha(K, K) = 0$ и $M_2 = \alpha(e, K)$; при $x = e$, $y = k \in K$ получаем $\beta(k, z) = \omega(\alpha(e, k), z)$. Тождество Якоби для $e, k_1, k_2 \in K$ при $u_i = \alpha(e, k_i)$ и $\alpha(k_1, k_2) = 0$ даёт $\beta(k_1, u_2) - \beta(k_2, u_1) = 0$, то есть $2\omega(u_1, u_2) = 0$. Так как $p \neq 2$, а u_i пробегают всё M_2 , имеем $\omega = 0$ — противоречие. $\square$

Независимое доказательство для $|\gamma_2/\gamma_3| = p^2$ (через обе формы ω_1, ω_2 отображения $[L_1, L_1] \rightarrow L_2$ и вычисление во внешней алгебре) — в вики (MATH-127, часть 3).

Замечание 6.4. (1) Условие $p \neq 2$ нужно: группы $\text{SmallGroup}(128, i)$, $i = 928, \dots, 937$, имеют тип $(3, 2, 1, 1)$ и $|G''| = 2$, и таких групп порядка 2^8 ещё 108 **[компьютер]**.
 (2) Два других условия при порядке 3^8 точны: из 904 неметабелевых 3-групп ступени 4 порядка 3^8 у 15 тип $(3, 3, 1, 1)$, у 889 — $(3, 2, 2, 1)$ **[компьютер]**; явная алгебра Ли типа $(3, 3, 1, 1)$ с $[M_2, M_2] \neq 0$ — в вики **[на бумаге]**.

- (3) Проверка: среди всех групп порядков 3^5 – 3^8 ступени ≥ 4 посылка выполнена у 13 077 групп, и у всех верно заключение; рецензент перебрал все 1 396 077 групп порядка 3^8 и все группы порядка 7^7 : 24 215 и 4 408 групп с $|\gamma_2/\gamma_3| = p^2$, $|\gamma_3/\gamma_4| = p$, нарушений нет [компьютер].

Предложение 6.5 ([Lean]; примеры при $p = 3$: [компьютер]). Пусть p нечётно и Q — p -группа ступени 4.

- (1) Если $|Q| \leq p^7$ или $|Q| = p^8$ и $d(Q) \geq 4$, то Q метабелева.
- (2) Если $|Q| = p^9$ и $Q'' \neq 1$, то $d(Q) \in \{3, 4\}$; при $d(Q) = 4$ тип равен $(4, 3, 1, 1)$ или $(4, 2, 2, 1)$, и при $p = 3$ оба встречаются ($Q_0 \times C_3$, где Q_0 порядка 3^8 — как в замечании 6.4(2)).

Доказательство. Пусть (a_1, a_2, a_3, a_4) — тип. По лемме 6.3 для $Q'' \neq 1$ нужно $a_3 \geq 2$ или не менее трёх порождающих у γ_2/γ_3 ; так как γ_2/γ_3 не циклична, $a_2 \geq 2$, поэтому $a_2 \geq 3$ или $a_3 \geq 2$. Кроме того, $a_1 \geq d(Q)$, $a_4 \geq 1$, а при $d(Q) = 2$ группа γ_2/γ_3 циклична. Значит, $d(Q) \geq 3$ и $|Q| \geq p^{d(Q)+5}$; отсюда (1) и первая часть (2), а при p^9 и $d = 4$ оценка достигается ровно на двух указанных типах. При p^9 и $d = 5$ единственный тип с $a_2 \geq 2$ — это $(5, 2, 1, 1)$, и такие группы метабелевы. $\square$

В частности, компьютерное утверждение предложения 5.1 «всякая 3-группа ступени 4 порядка 3^5 , 3^6 , 3^7 метабелева» теперь доказано, как и наблюдение, что все неметабелевы группы ступени 4 порядка 3^8 имеют ранг 3.

Группы с G/γ_2 экспоненты 3.

Теорема 6.6 ([на бумаге; Lean по модулю Тахары]; опирается на [Tah81, теорема 6.1]). Пусть Q — конечная 3-группа, у которой $Q/\gamma_2(Q)$ имеет экспоненту 3. Тогда $D_5(Q) = \gamma_5(Q)$. Более общо, $D_5(G) = \gamma_5(G)$ для всякой группы G , у которой $G/\gamma_2(G)$ конечна и имеет экспоненту 3.

Сюда входят неметабелевы группы ступени 4 любого ранга и порядка; например, все 904 неметабелевы группы ступени 4 порядка 3^8 имеют $Q/\gamma_2 \cong C_3^3$ [компьютер].

Доказательство. Сведения. Для G из второго утверждения $\bar{G} = G/\gamma_5(G)$ нильпотентна с конечной абелианизацией, а потому конечна: её нижние центральные факторы — образы тензорных степеней $\bar{G}_{ab}$; значит, $\bar{G}$ — 3-группа, и $D_5(G) \subseteq \gamma_5(G)$ следует из $D_5(\bar{G}) = 1$ по функториальности. Итак, пусть Q — конечная 3-группа с $\gamma_5(Q) = 1$ и Q/γ_2 экспоненты 3; докажем $D_5(Q) = 1$. Теорема 6.1 Тахары сформулирована для любой конечной группы с N -рядом, обрывающимся на $H_5 = 1$ [Tah81, §6, с. 159], поэтому ступень ≤ 3 отдельно разбирать не нужно. Группы γ_3 и γ_4 пишем аддитивно, где удобно.

Тождества. (i) γ_2/γ_3 , γ_3/γ_4 , γ_4 — элементарные абелевы: они порождены значениями билинейных отображений, один аргумент которых берётся из Q/γ_2 . (ii) $P: Q/\gamma_2 \rightarrow \gamma_2/\gamma_3$, $x \mapsto x^3\gamma_3$, и $\pi: \gamma_2/\gamma_3 \rightarrow \gamma_3/\gamma_4$, $a \mapsto a^3\gamma_4$, — гомоморфизмы. (iii) Для $x \in Q$, $a \in \gamma_2$:

$$[x^3, a] = [x, a]^3 = [x, a^3], \quad [a, x^3] = [a, x]^3.$$

Действительно, для $c = [x, a] \in \gamma_3$ имеем $c^x = c[c, x]$ с центральным $[c, x]$, так что $[x^3, a] = c^3[c, x]^3 = c^3$, поскольку γ_4 экспоненты 3; и $[x, a^3] = c c^a c^{a^2} = c^3$, поскольку $[\gamma_3, \gamma_2] = 1$. Следовательно, если $a \in \gamma_2$ и $a^3 \in \gamma_4$, то $[x^3, a] = [x, a^3] = 1$.

Описание Тахары. Выберем базисы единственности: $x_1, \dots, x_s$ в Q/γ_2 так, что $x_1, \dots, x_m$ порождают дополнение к $\ker P$, а $x_{m+1}, \dots, x_s$ порождают $\ker P$ (то есть $x_i^3 \in \gamma_3$ при $i > m$); $x_{2k} = x_k^3$ при $k \leq m$, дополненные до базиса $x_{21}, \dots, x_{2t}$ группы γ_2/γ_3 . Все порядки $d(i), e(k), f(l)$ равны 3, а константы b_{ik} из $x_i^3 \equiv \prod_k x_{2k}^{b_{ik}} \pmod{\gamma_3}$ равны $b_{ik} = \delta_{ik}$ при $i \leq m$ и $b_{ik} = 0$ при $i > m$. По [Tah81, теорема 6.1] (сверено с оригиналом, с. 159–161) $D_5(Q)$ порождена элементами

$$g = \sum_{i < j} u_{ij} [x_i^3, x_j] + \sum_{i, k} v_{ik} \sum_{l > k} b_{il} [x_{2l}, x_{2k}] + \sum_{i \leq j \leq k} w_{ijk} [x_i^3, x_j, x_k]$$

по целочисленным наборам (u, v, v', w, w', w'') , удовлетворяющим условиям (A)–(F) Тахары (у Тахары g записан со знаками минус; условия однородны, так что подгруппа та же). При всех порядках, равных 3, используются: (B) $\sum_{h > i} u_{ih} b_{hk} - \sum_{h < i} u_{hi} b_{hk} + 3v_{ik} + 3v'_{ik} = 0$; (C) $3 \mid u_{ij}$; (D) $3v_{ik} - \sum_{h \leq i} w_{hii} b_{hk} - \sum_{h > i} w''_{iih} b_{hk} \equiv 0$ и, при $i < j$, $\sum_{h \leq i} w_{hij} b_{hk} + \sum_{i < h \leq j} w'_{ihj} b_{hk} + \sum_{h > j} w''_{ijh} b_{hk} \equiv 0 \pmod{3}$; (E) $\sum_k v'_{ik} d_{kl} \equiv$ комбинация членов с u и членов $w_{ghl} \alpha_l^{(gh)}$, $w_{ghi} \alpha_l^{(gh)}$, $w'_{igh} \alpha_l^{(gh)} \pmod{3}$, где $x_{2k}^3 \equiv \prod_l x_{3l}^{d_{kl}}$ и $[x_g^3, x_h] \equiv \prod_l x_{3l}^{\alpha_l^{(gh)}} \pmod{\gamma_4}$; (F) $\sum_i v_{ik} b_{ik} \equiv 0$ и $\sum_i v_{ik} b_{il} + \sum_i v_{il} b_{ik} \equiv 0 \pmod{3}$ при $k < l$. Условие (C) — это (C) Тахары при $p = 3$ и $d(i) = d(j)$, где $\binom{3}{3} = 1$ не делится на 3; при $p \geq 5$ оно пусто.

$g = 0$ для каждого допустимого набора. (1) Подстановка $b_{hk} = \delta_{hk}$ ($k \leq m$) в (D) показывает, что каждый коэффициент w, w', w'' , у которого отмеченный индекс (соответственно первый, средний, последний) $\leq m$, делится на 3. (2) Поэтому w -часть равна нулю: при $i \leq m$ — по (1), так как γ_4 экспоненты 3; при $i > m$ — так как $x_i^3 \in \gamma_3$ и $[x_i^3, x_j, x_k] \in \gamma_5 = 1$. (3) Запишем $u_{ij} = 3u'_{ij}$ по (C); тождество (iii) даёт $u_{ij} [x_i^3, x_j] = u'_{ij} [x_i^3, x_j^3]$, и это равно нулю, если не $i, j \leq m$. Положим $Y_k = x_k^3$ ($k \leq m$). (4) v -часть равна $\sum_{k < i \leq m} v_{ik} [Y_i, Y_k]$. (5) Пусть U — кососимметрическая матрица, $U_{ik} = u'_{ik}$ при $i < k$. Тогда (B) даёт $v'_{ik} = -v_{ik} - U_{ik}$ при $k \leq m$ и $v'_{ik} = -v_{ik}$ при $k > m$; (F) даёт $v_{kk} \equiv 0$, $v_{lk} \equiv -v_{kl}$ при $k, l \leq m$ и $v_{kl} \equiv 0$ при $k \leq m < l$; в (E) все члены с w по (1) равны нулю по модулю 3, так как при отмеченном индексе $g > m$ имеем $\alpha^{(gh)} \equiv 0$. Значит, (E) говорит, что $a_i = \prod_k x_{2k}^{v'_{ik}}$ удовлетворяет

$a_i^3 \in \gamma_4$. При $M = v + U$ (кососимметрична по модулю 3 на индексах $\leq m$) получаем $a_i \gamma_3 = -\rho_i$, $\rho_i = \sum_{k \leq m} M_{ik} Y_k \in \ker \pi$. (6) В итоге

$$g = \sum_{k < i \leq m} M_{ik} [Y_i, Y_k] = \frac{1}{2} \sum_{i \leq m} [x_i^3, r_i],$$

где $r_i \in \gamma_2$ — представитель ρ_i (деление на 2 законно в γ_4 экспоненты 3), и $[x_i^3, r_i] = [x_i, r_i^3] = 1$ по (iii), так как $r_i^3 \in \gamma_4$ централен. Итак, $g = 1$. $\square$

Замечание 6.7. Условие на экспоненту используется в трёх местах: в (C) (при $d(j) \geq 3d(i)$ условие Тахары пусто, и появляются члены $u_{ij}[x_i^{d(i)}, x_j^3]$ с $x_j^3 \notin \gamma_2$), при выборе базиса (условия (D), (E) Тахары выполнены лишь по модулю $(d(i), e(k)), (d(i), f(l))$) и в (iii). Следующий случай, $Q/\gamma_2 \cong C_{3^a} \times C_3^{s-1}$, закрывает теорема 6.8 ниже. Проверка теоремы: 169 случайных неметабелевых групп степени 4 с $Q/\gamma_2 \cong C_3^3$ или C_3^4 порядков 3^{10} – 3^{79} , у 29 из них $\Omega_1(Z) \cap Q'' \cap M_5 \neq 1$: тождество (iii) выполнено и $D_5 = 1$ во всех (усечённая алгебра Магнуса по модулю 3^{19} с сертификатом точности) **[компьютер]**.

Теорема 6.8 **([на бумаге; Lean по модулю Тахары])**; опирается на [Tah81, теорема 6.1]; проверено независимой построчной рецензией). Пусть Q — конечная 3-группа с $Q/\gamma_2(Q) \cong C_{3^a} \times C_3^{s-1}$ при некотором $a \geq 1$, т. е. у Q/γ_2 не больше одного инварианта, большего 3. Тогда $D_5(Q) = \gamma_5(Q)$; то же верно для всякой группы G с $G/\gamma_2(G)$ такого вида.

Набросок. При $a = 1$ это теорема 6.6; пусть $a \geq 2$, $\gamma_5(Q) = 1$, и x_s имеет порядок 3^a по модулю γ_2 . Так как $\Lambda^2(C_{3^a} \times C_3^{s-1})$ имеет экспоненту 3, факторы γ_2/γ_3 , γ_3/γ_4 , γ_4 по-прежнему элементарные абелевы, тождества (i)–(iii) из доказательства теоремы 6.6 верны для всех $x \in Q$, и, кроме того, $[x^{3^n}, y] = [x, y]^{3^n}$ при $n \geq 2$. Класс $x_s^{3^a} \gamma_3$ не зависит от выбора x_s , так что случаев два. Если $x_s^{3^a} \notin \gamma_3$, условие (B) Тахары даёт $3 \mid u_{is}$, все члены с $x_s^{3^a}$ исчезают по тождеству выше, и доказательство теоремы 6.6 проходит. Если $x_s^{3^a} \in \gamma_3$, коэффициенты u_{is} ничем не ограничены. При $a \geq 3$ все новые члены — 3^a -е степени элементов γ_3 и равны 1. При $a = 2$ новый член $\sum_i u_{is}[x_i^9, x_s]$ в g сокращает лишь половину спаривания $\frac{1}{2} \sum_i [x_i^3, r_i]$, которое по (E) теперь равно $-\sum_i u_{is}[x_i, x_s]^9$; остаток равен $\frac{1}{2}[r_s^3, x_s]$ с $r_s = \prod_i x_i^{3u_{is}}$, и условие (E) для строки s , которое «видит» u_{is} через (B) с $d(s)/d(i) = 3$, даёт $r_s^3 \in \gamma_4$. Значит, $g = 1$ для всякого допустимого набора. (Этот шаг не пустой: есть группы порядка 3^{16} с $x_s^9 \in \gamma_3$ и $[x_i^9, x_s] \neq 1$ **[компьютер]**.) Здесь $\alpha^{(ss)} = 0$ читается по образующим Тахары типов (V), (VI) [Tah81, с. 150–151]. Подробности: вики, МATH-135. $\square$

Следовательно, у минимальной 3-группы с $D_5 \neq \gamma_5$ у Q/γ_2 не меньше двух инвариантов ≥ 9 , так что $|Q/\gamma_2| \geq 3^5$. Проверка: случайные неметабелевы группы ступени 4 с $Q/\gamma_2 \cong C_9 \times C_3^{s-1}$, $s = 2, 3, 4$, и $C_{27}, C_{81} \times C_3^{s-1}$, в том числе со случаем $x_s^{3^a} \in \gamma_3$ [компьютер; прогоны идут].

p -накрывающая группа. Для p -группы P p -класса с пусть P^* — её p -накрывающая группа, $M \leq Z(P^*)$ — мультипликатор (элементарная абелева, $P^*/M \cong P$), а $N = P_{c+1}(P^*) \leq M$ — ядро (nucleus) [OBr90]. Непосредственные потомки шага 1 — это $Q = P^*/U$, где $U < M$ индекса p и $N \not\leq U$; тогда $\langle z \rangle = M/U$ — центральная подгруппа порядка p и $Q/\langle z \rangle \cong P$.

Лемма 6.9 (фильтр родителей). *Если одна из подгрупп $M \cap P^{**}$, $M \cap M_5(P^*)$, N , а при ступени P , равной 3, ещё и $\gamma_4(P^*)$, лежит в $\gamma_5(P^*)$, то ни один непосредственный потомок Q шага 1 группы P не имеет ступени 4 с $z \in Q'' \cap M_5(Q)$.*

Доказательство [на бумаге]. γ_n , коммутанты и подгруппы Дженнингса $M_n = \prod_{i \geq n} \gamma_i^{p^j}$ переходят в фактор-группы: $X(P^*/U) = X(P^*)U/U$. Для ступени 4 нужно $\gamma_5(P^*) \leq U$ (и $\gamma_4(P^*) \not\leq U$, если ступень P равна 3); для $z \in Q''$ нужно $M \cap P^{**} \not\leq U$; для $z \in M_5(Q)$ нужно $M \cap M_5(P^*) \not\leq U$; и $N \not\leq U$. $\square$

Теорема 6.10 ([на бумаге]). *Пусть p нечётно и P — конечная p -группа ступени 3 с $|\gamma_2(P)/\gamma_3(P)| = p^2$ и $|\gamma_3(P)| = p$. Тогда $P^{**} = 1$. В частности, все непосредственные потомки шага 1 группы P метабелевы, и P отсеивается леммой 6.9.*

Доказательство. $P'' \subseteq \gamma_4(P) = 1$, поэтому $P^{**} \leq M$, а так как подгруппы U индекса p в M пересекаются тривиально, достаточно доказать $Q'' = 1$ для $Q = P^*/U$. Здесь $\gamma_4(Q) \leq \langle z \rangle$. Если $z \notin \gamma_2(Q)$, то $\gamma_2(Q) \cong \gamma_2(P)$ абелева. Если $z \in \gamma_2(Q) \setminus \gamma_4(Q)$, то $\gamma_4(Q) = 1$ и $Q'' \subseteq \gamma_4(Q) = 1$. Если $z \in \gamma_4(Q)$, то факторы γ_2/γ_3 , γ_3/γ_4 у Q те же, что у P , и лемма 6.3 даёт $Q'' \subseteq \gamma_5(Q) = 1$. (К самой P^* лемма 6.3 не применима: её нижние центральные факторы больше.) $\square$

Замечание 6.11. (1) При $p = 2$ теорема неверна: SmallGroup(64, 138) имеет тип (3, 2, 1), а её 2-накрывающая группа — порядок 2^{13} , ступень 4 и $|P^{**}| = 2$; так же ведут себя SmallGroup(128, i), $i = 522, 599, 621, 1755$, и 12 групп порядка 2^8 [компьютер].
 (2) Проверка: посылка выполнена у 13 315 групп порядка 3^8 и 2 754 групп порядка 7^7 , и у всех $P^{**} = 1$ [компьютер].
 (3) Теорема не утверждает, что такие P терминальны. Из 7 824 групп порядка 3^8 типа (5, 2, 1) (SmallGroup(3^8 , i), $1\,387\,558 \leq i \leq 1\,395\,381$) у 190 ядро порядка 3, например у SmallGroup(81, 9) $\times 3_+^{1+2} \times C_3$, и все их потомки метабелевы типа (5, 2, 1, 1) [компьютер]. При элементарной абелевой P/γ_2 для нетерминальности нужны $|Z(P) \cap \gamma_2(P)| = p^2$, элементарная абелева $\gamma_2(P)$ и $P^p \leq Z(P)$, а

при $p = 3$ ещё одно линейное условие над $\mathbb{F}_3$ **[на бумаге]**; эти условия выполнены у всех 190, но и у 573 терминальных групп, и точный критерий открыт **[открыто]**.

Порядки 3^8 и 3^9 .

Теорема 6.12 ([компьютер + на бумаге]). $D_5(Q) = \gamma_5(Q)$ для всякой 3-группы Q порядка не больше 3^9 . Следовательно, $D_5(G)/\gamma_5(G)$ не имеет 3-закручивания для всякой конечной группы G , силовская 3-подгруппа которой имеет порядок не больше 3^9 .

Доказательство. По теореме 5.4(3) контрпример Q наименьшего порядка имеет порядок 3^8 или 3^9 , и к нему применима лемма 6.2; для порядка 3^9 можно пользоваться результатом для порядка 3^8 . Переход к G — как в теореме 5.4.

Порядок 3^8 . Все группы есть в библиотеке SmallGroups (пакет `sglppow`). Из 1 396 077 групп 904 неметабелевы ступени 4; все они ранга 3 (как и должно быть, предложение 6.5), $|Z| = |Q''| = |\gamma_4| = 3$ и $Q/\gamma_2 \cong C_3^3$, типы $(3, 2, 2, 1)$ (889) и $(3, 3, 1, 1)$ (15) **[компьютер]**. Поэтому теорема 6.6 даёт $D_5 = 1$ для всех них. Независимо: у 699 из них $z \in Q'' \cap M_5$, и для каждой усечённая алгебра Магнуса (121 моном, по модулю 3^{19} , с сертификатом точности $3^{18} \Delta \subseteq \Delta^5 + 3^{19}$) даёт $z \notin D_5$ **[компьютер]**.

Порядок 3^9 . Пусть Q — контрпример и $P = Q/\langle z \rangle$ порядка 3^8 ступени 3 или 4. По предложению 6.5(2) $d(Q) \in \{3, 4\}$; случай $d(Q) = 5$, тип $(5, 2, 1, 1)$, исключён на бумаге (или, иначе, теоремой 6.10: все 7824 возможных родителя отсеиваются леммой 6.9, что подтверждает и полный прогон). При $d \in \{3, 4\}$ **[компьютер]**: из 771 597 групп P порядка 3^8 ранга 3 или 4 ступени 3 или 4 фильтр леммы 6.9 проходят 3986; ANUPQ выдаёт их 305 583 непосредственных потомка шага 1; у 64 362 из них ступень 4, $Q'' \neq 1$ и циклический центр, и у 62 245 из этих $z \in Q'' \cap M_5$. Для каждой из 62 245 усечённая алгебра Магнуса даёт $z \notin D_5$, точно. Переданные ей копредставления независимо проверены через ANUPQ (порядок 3^9 , ступень 4, z — центральный элемент порядка 3 из $Q'' \cap M_5$). Фильтр сверен с полным порождением на отрезке номеров и на случайной выборке из 1500 родителей; ни один кандидат не потерян. Шаг порождения потомков повторён на версии ANUPQ, в которой исправлены ошибки, найденные при аудите пакета (<https://ispacex.github.io/gap/>; две из них дают неверных потомков, но на входах, которые здесь не встречаются). У каждого из 3986 родителей совпали число потомков, число групп ступени 4 с $Q'' \neq 1$ и циклическим центром и число кандидатов, а 62 245 копредставлений совпали дословно. $\square$

Затраты и данные. Прогон порядка 3^9 занял 3 ч 21 мин на 4 ядрах; фильтр сократил время на родителя примерно с 350 до 27 мс. Код: `c38.g`, `c39.g` (C39Pass — это лемма 6.9), `c39all.g`, `d5z.py`, `chk38.g`, `r5.g` в `compute/magnus`.

7. ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

- (1) Вопрос 1.1; равносильно: верно ли, что $D_5(Q) = 1$ для всех конечных 2-групп степени 3? **[открыто]** У контрпримера обязательно $D_4(Q) \neq 1$. С помощью усечённой алгебры Магнуса $(\mathbb{Z}[G]/\Delta^n \cong T_{<n}(\mathbb{Z}^k)/I_n$ для копредставления с k порождающими; её ранг $(k^n - 1)/(k - 1)$ не зависит от $|G|$) мы проверили факторы степени 3 трёхсоотношенной группы рипсовского типа из [BM23, §1.2] и 13 её вариантов (порядки 2^{40} – 2^{107}): во всех $D_5 = 1$, в том числе в трёх, порядков 2^{84} , 2^{90} и 2^{107} , где $D_4 \neq 1$ **[компьютер; две независимые реализации совпали, и сертификат точности выполнен во всех случаях, так что $D_4 \neq 1$ и $D_5 = 1$ доказаны, а не только по модулю 2^{30}]**. Метод (код: <https://gitlab.com/ispacex/cflint-core>) сверен также с вычислением решёток на 30 435 группах порядка $\leq 3^7$ без расхождений; на порядке 3^7 он в 200–400 раз быстрее.
- (2) Существует ли 3-кручение в $D_5(G)/\gamma_5(G)$ для некоторой G , т. е. достигается ли оценка Тахары 6? **[открыто]** («Пропась Рипса», доклад Михайлова 2013 г.) Сам Тахара считал оценку 6 наилучшей [Tah81, с. 142]. В конце статьи он анонсировал отдельную работу [Tah81, с. 173], в которой собирался показать $D_5(G) = \gamma_5(G) = 1$ для своих 2-групп с $D_4 \neq \gamma_4$ [Tah77] и построить контрпримеры к $D_5(G) = \gamma_5(G)$. Что у этих контрпримеров в D_5/γ_5 будет 3-кручение, в анонсе не сказано, а $D_5 \neq \gamma_5$ с 2-кручением и так известно: $2 \mid s(5)$ в обозначениях [BM23, §1]. Этой работы мы не нашли. Её нет в zbMATH и в списке публикаций Тахары; его доклад 1981 г. [THSH81] — о другом; его обзоры в Bulletin of Aichi University of Education (1981, 1982) мы не видели[†]. В обзоре 2003 г. [Tah03] Тахара приводит утверждение Гупты, что экспонента D_n/γ_n не больше 2. Бартольди и Михайлов [BM23, §1] формулируют оценку как $s(5) \in \{2, 6\}$, т. е. вопрос открыт. Известно теперь: 3-кручения нет, если силовская 3-подгруппа имеет порядок $\leq 3^9$, и $D_5 = \gamma_5$, если G/γ_2 конечна и имеет экспоненту 3 (§6). Минимальная 3-группа с $D_5 \neq \gamma_5$ имеет порядок $\geq 3^{10}$, степень 4, циклический центр и не меньше двух инвариантов ≥ 9 у Q/γ_2 (теорема 6.8). На бумаге открыты: Q/γ_2 с двумя инвариантами ≥ 9 , например $C_9 \times C_9 \times C_3$, где γ_2/γ_3 может иметь экспоненту 9, и точный критерий нетерминальности родителей типа $(5, 2, 1)$ (замечание 6.11(3)).
- (3) Групповой аналог теоремы С из [IMP26]: верно ли, что $D_{2c-1}(G) = 1$ для всякой метабелевой группы степени $\leq c$? При $c = 3$ это вопрос 1.1. **[открыто]** При нечётном p и $c \leq p + 1$ ответ положительный по [GT85, теорема 3.2] (со сведением к конечным метабелевым p -группам); открыты случаи $p = 2$, $c \geq 3$ и нечётное p , $c \geq p + 2$. Группа плато из [IMP26, §3.3] метабелева

ступени 4 с $D_6 \neq 1$ **[компьютер]**, так что $2c - 2$ достигается, как и для колец Ли. Её выделенный элемент w не лежит в D_7 , а так как $D_6 = \langle w \rangle$ [IMP26], то $D_7 = 1$ **[компьютер; плотная форма Хауэлла по модулю 2^{32} идеала соотношений в усечённой алгебре Магнуса ранга 55 986, с сертификатом точности]**: эта группа не контрпример, и аналог, если он верен, при $c = 4$ точен. Первый поиск контрпримера при $c = 4$ сводится к метабелевым факторам ступени 4 с конечной циклической γ_4 и проверке её элемента порядка 2 **[бумага; используется $D_5^2 \subseteq G''\gamma_5$ [MP09, теорема 2.28]]**; около 170 таких групп (факторы и возмущения группы плато, групповые версии кольца Ли L_1 из [IMP26, пример 3.2], случайные копредставления на 4 образующих) — во всех $D_7 \cap \gamma_4 = 1$ **[компьютер]**. При $c = 5$ группа плато, сдвинутая на ступень вверх (пять образующих), имеет $D_7 \neq 1$, но $D_8 \cap \gamma_5 = 1$ **[компьютер; с сертификатом]**, так что для метабелевых групп ступени 5 достигается по крайней мере $D_7 \neq 1$ — на единицу меньше $2c - 2$; элементарная лемма о спаривании показывает, что в ступени 5 показатели соотношений [IMP26, (3.12)] пришлось бы учетверить, а не удвоить **[бумага]**, и наши попытки в этом направлении вырождают группу **[компьютер]**. Код и данные: <https://gitlab.com/ispacex/cflint-fast-core/docs/analysis.md>, §§6.5–6.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [BM23] L. Bartholdi, R. Mikhailov, *Group and Lie algebra filtrations and homotopy groups of spheres*, J. Topology **16** (2023), 822–853; arXiv:1805.10894.
- [BP15] L. Bartholdi, I. B. S. Passi, *Lie dimension subrings*, Internat. J. Algebra Comput. **25** (2015), 1301–1325.
- [GNO] G. Gamble, W. Nickel, E. A. O’Brien, *ANUPQ: ANU p-Quotient*, GAP package, version 3.3.2.
- [GK92] N. Gupta, Yu. V. Kuz’mín, *On varietal quotients defined by ideals generated by Fox derivatives*, J. Pure Appl. Algebra **78** (1992), 165–172.
- [Gru57] K. W. Gruenberg, *Residual properties of infinite soluble groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **7** (1957), 29–62.
- [GT85] N. Gupta, K.-I. Tahara, *Dimension and lower central subgroups of metabelian p-groups*, Nagoya Math. J. **100** (1985), 127–133; doi:10.1017/S0027763000000258.
- [Gup02] N. D. Gupta, *The dimension subgroup conjecture holds for odd order groups*, J. Group Theory **5** (2002), 481–491.
- [HMP07] M. Hartl, R. Mikhailov, I. B. S. Passi, *Dimension quotients*, J. Indian Math. Soc., Centenary Volume (2007), 63–107; arXiv:0803.3290.
- [IMP26] V. Ionin, R. Mikhailov, T. Petrov, *Dimension subrings of Lie rings*, arXiv:2610.02042 (2026); код на Lean: <https://github.com/TimmPeterson/lie-algebras>.
- [Jen41] S. A. Jennings, *The structure of the group ring of a p-group over a modular field*, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 175–185.
- [KM26] E. I. Khukhro, V. D. Mazurov (eds.), *Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook*, 21st ed., 2026; arXiv:1401.0300.

- [MP09] R. Mikhailov, I. B. S. Passi, *Lower central and dimension series of groups*, Lecture Notes in Math. **1952**, Springer, 2009.
- [OBr90] E. A. O'Brien, *The p -group generation algorithm*, J. Symbolic Comput. **9** (1990), 677–698.
- [Pas68] I. B. S. Passi, *Dimension subgroups*, J. Algebra **9** (1968), 152–182.
- [Rip72] E. Rips, *On the fourth integer dimension subgroup*, Israel J. Math. **12** (1972), 342–346.
- [Tah77] K.-I. Tahara, *On the structure of $Q_3(G)$ and the fourth dimension subgroups*, Japan. J. Math. (N.S.) **3** (1977), 381–394; doi:10.4099/math1924.3.381.
- [Tah81] K.-I. Tahara, *The augmentation quotients of group rings and the fifth dimension subgroups*, J. Algebra **71** (1981), 141–173; doi:10.1016/0021-8693(81)90111-3 (открытый архив Elsevier).
- [Tah03] K.-I. Tahara, *Survey on dimension subgroup problem*, in: Recent advances in group theory and low-dimensional topology (Pusan, 2000), Res. Exp. Math. **27**, Heldermann, Lemgo, 2003, 167–181[†] (видели только рецензию zbMATH, Zbl 1055.20002).
- [THSH81] K.-I. Tahara, K. Horibe, M. Shimizu, A. Hosomi, *Some topics in integral group rings*, RIMS Kôkyûroku **438** (1981), 55–65.